Transformadas Espaço-Frequência

• A TF provê apenas informação *global* sobre o conteúdo em frequência do sinal analisado.

$\rightarrow$ Para saber onde cada frequência se localiza, podemos usar janelas:

Transformada *Janelada* de Fourier

$$F_w(\omega, x) = \mathcal{F}\{f(\xi)w(\xi - x)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i\omega\xi} f(\xi)w(\xi - x)$$

• $|F_w(\omega, x)|^2$ define o *espectrograma* do sinal $f(x)$, sob a janela $w(x)$.

• A janela permite a localização espacial do espectro, mas este perde resolução em frequência.

• Diferentes formas de janela podem ser utilizadas; janelas Gaussianas definem a *transformada de Gabor*.

Transformada de Gabor:

$$G_\sigma(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i\omega\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2\sigma^2}} f(\xi)$$

• O núcleo $e^{-i\omega\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2\sigma^2}}$ é uma *função de Gabor*.

• A TF de uma função de Gabor espacial é uma função de Gabor na frequência.

• As funções de Gabor têm máxima localização simultânea no espaço e na frequência:

$\rightarrow$ O produto das suas larguras no espaço e na frequência satisfaz $\Delta x \Delta\omega = \frac{1}{2\pi}$

Observações:

• Para qualquer função $f(x)$ e sua TF, $F(\omega)$, definem-se as larguras de banda espacial (Δx) e na frequência ($\Delta\omega$), como

$$\Delta^2 x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}$$

$$\Delta^2 \omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

• Pelo princípio da incerteza de Heisenberg,

$\Delta x \Delta\omega \geq \frac{1}{2\pi}$

Exemplo de transformada de Gabor:

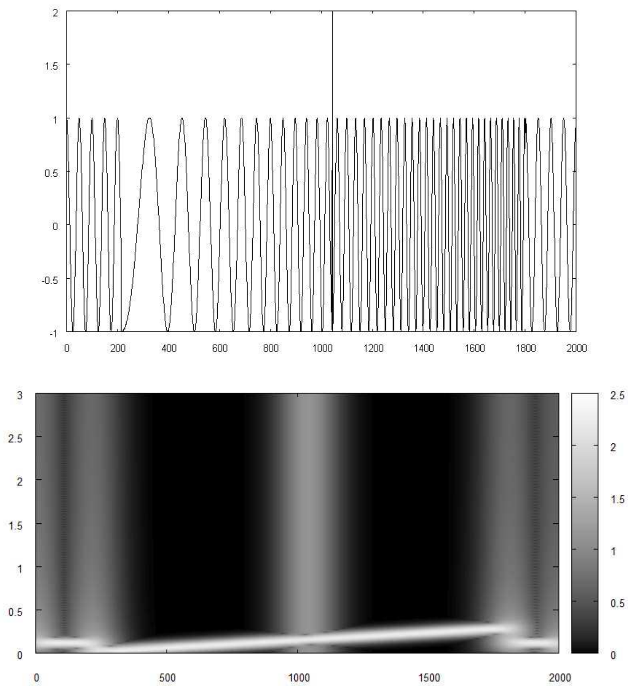


Figure 1: Sinal multi-componente e seu espectrograma de Gabor, $|G(\omega,t)|^{1/4}$.

A Transformada *Wavelet* Contínua

• A transformada de Gabor analisa as diferentes frequências utilizando filtros de mesma largura.

→ as larguras de banda Δx e $\Delta\omega$ das funções analisadoras não mudam com a frequência.

• A transformada wavelet utiliza funções analisadoras tais que $\Delta\omega$ é proporcional a ω.

→ as componentes que têm variação espacial *mais rápida* são analisadas com *maior resolução espacial*.

Transformada Wavelet Genérica:

$$U(s,x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; \psi\left(\frac{\xi - x}{s}\right) f(\xi)$$

• $U(s,x)$ é uma transformada *espaço-escala*:

→ s: parâmetro de escala

• A função $\psi(x)$ é chamada *wavelet-mãe*.

• A wavelet de Morlet utiliza uma *função de Gabor real*, como wavelet-mãe:

$$\psi(x) = e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}} \cos(\pi x)$$

Exemplo de transformada wavelet:

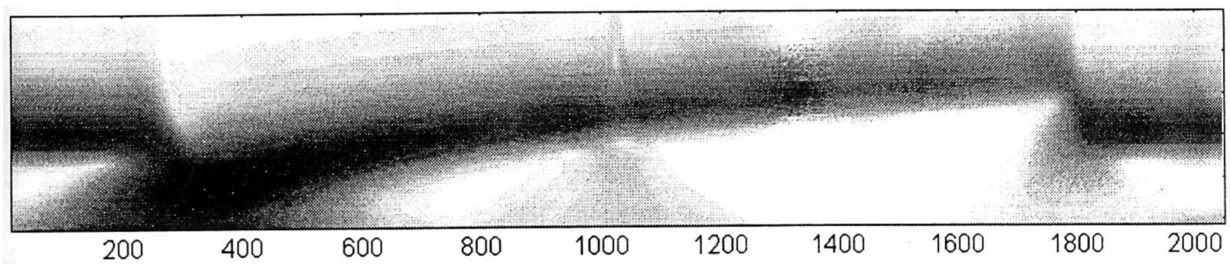


Figure 2: Transformada wavelet para o mesmo sinal da Fig. 1, usando Morlet.

A Transformada de Wigner

Na transformada de Wigner, o próprio sinal é usado como função analisadora:

$$W(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f^*(x - \xi/2) f(x + \xi/2) e^{-i\omega\xi}$$

ou, equivalentemente,

$$W(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F^*(\omega + \Omega/2) F(\omega - \Omega/2) e^{-i\Omega x}$$

onde $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$.

• A transformada de Wigner é *real*, e apresenta uma série de propriedades ótimas, do ponto de vista da análise de sinais.

e.g.,

→ A TW de um impulso no tempo (na frequência) é um impulso no tempo (na frequência).

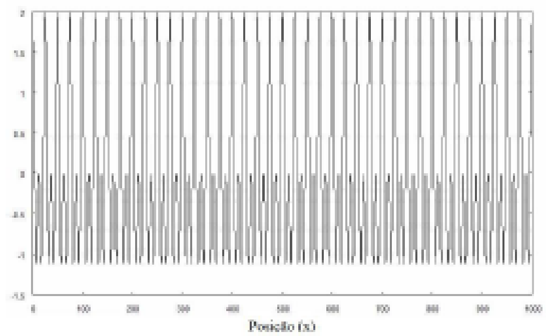
→ As *marginais* fornecem as densidades de energia do sinal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega, x) d\omega = |f(x)|^2$$

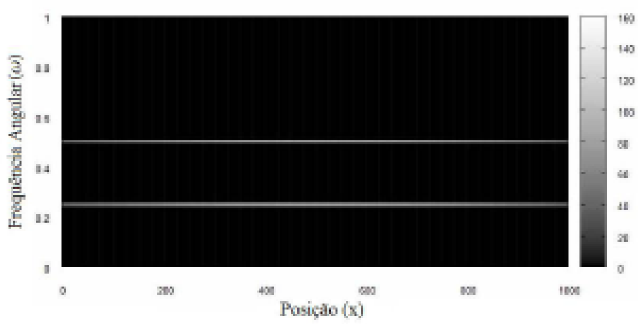
$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega, x) dx = |F(\omega)|^2$$

• Por não ser linear, a transformada de Wigner apresenta o problema dos *termos cruzados*:

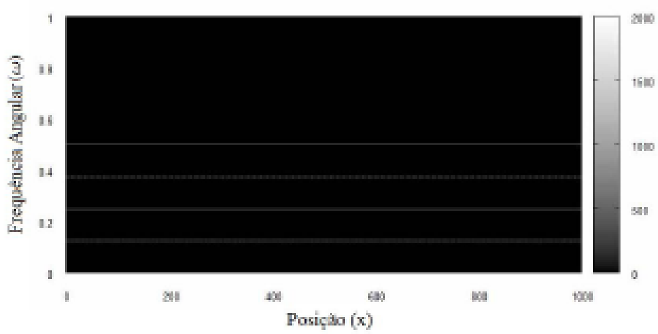
→ Surgimento de componentes espúrias no espaço e/ou na frequência.



(a)



(b)



(c)

a) Sinal formado pela combinação de dois cossenos. b) Componentes obtidas com a transformada de Gabor. c) Componentes obtidas com a transformada de Wigner, ilustrando o problema dos termos cruzados.

A Transformada *S*

• Tenta combinar as vantagens das transformadas de Gabor e wavelet.

• Emprega janelas Gaussianas com largura inversamente proporcional à frequência:

$\rightarrow 1/\omega$ faz o papel de *um parâmetro de escala*

$$S(\omega, x) = \frac{|\omega|}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2\omega^2}{2(2\pi)^2}} f(\xi) d\xi$$

• Em contraste com a wavelet, o termo oscilatório na transformada *S* não se desloca com x.

$\rightarrow$ Vantajoso em certas aplicações

A Transformada Sintonizada de Gabor

• A função analisadora de Gabor se adapta ao sinal analisado.

$\rightarrow$ Largura e fase determinadas pela TF do sinal

$$T(\omega, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i[\omega\xi + \varphi_F(\omega)]} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{2|F(\omega)|^2}} f(\xi)$$

onde $F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi_F(\omega)}$ é a Transformada de Fourier de $f(x)$.

$\rightarrow$ Semelhanças com a transformada *S*, mas melhor resolução simultânea espaço-frequência.

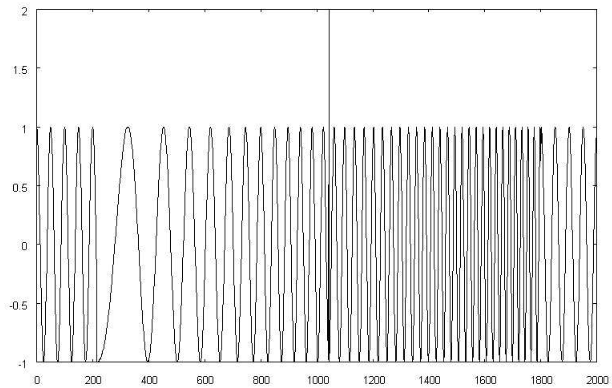
$\rightarrow$ Preserva certas propriedades analíticas da transformada de Wigner.

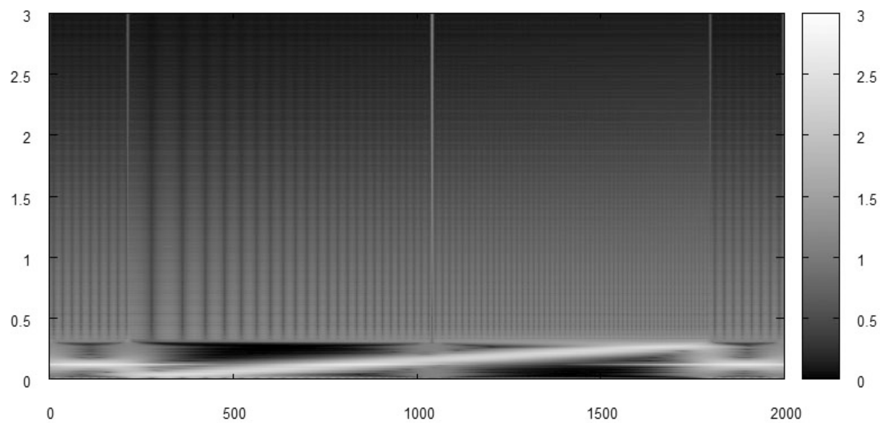
• Versão para análise de sinais espectrais:

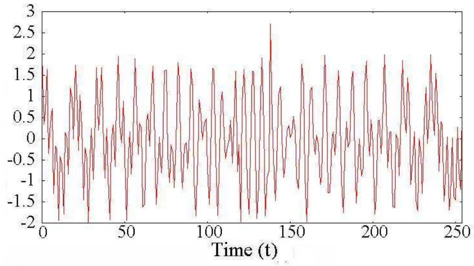
$$T_2(\omega, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{-i[\Omega x + \varphi_f(x)]} e^{-\frac{(\Omega - \omega)^2}{16\pi^3 |f(x)|^2}} F(\Omega)$$

onde $f(x) = |f(x)|e^{j\varphi_f(x)}$ é a Transformada de Fourier Inversa de $F(\omega)$.

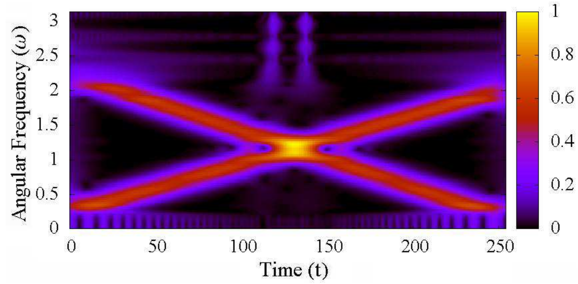
Exemplos de aplicação:



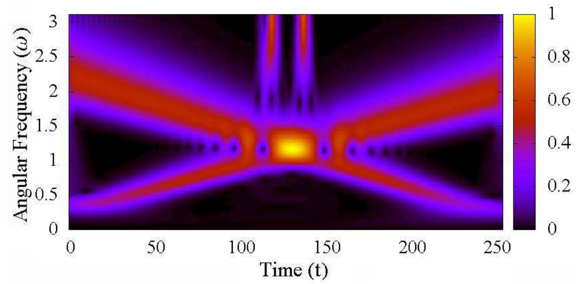




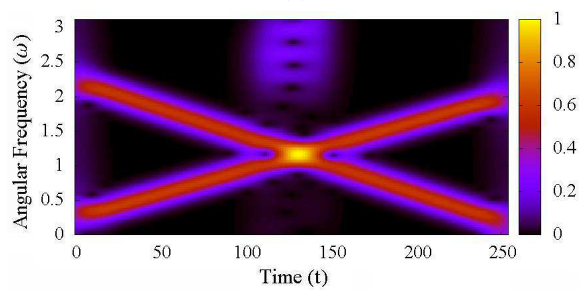
(a)



(b)

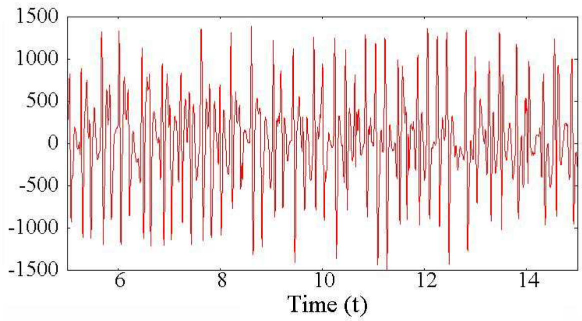


(c)

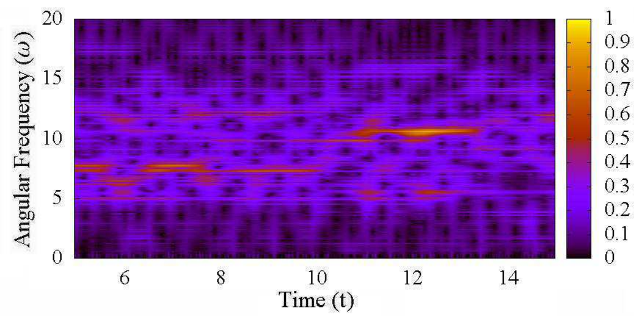


(d)

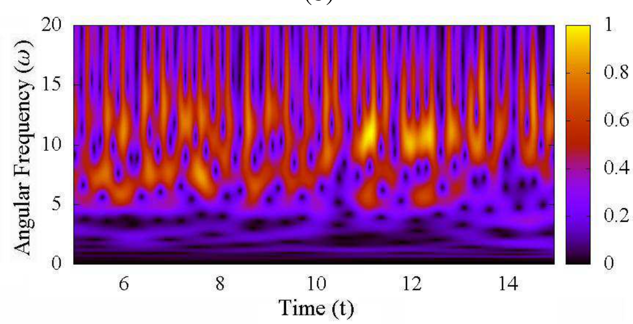
Figure 3: a) Input signal. b) STGT. c) S-Transform. d) Gabor transform, $\sigma_g = 10$.



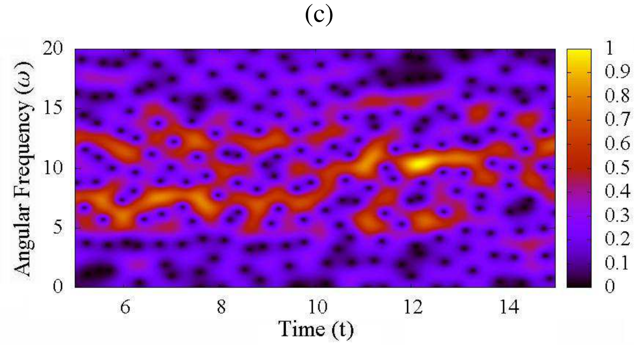
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 4: Time-frequency representations of an EEG signal. a) Segment from times $t = 5$ to $t = 15$ of record S030 of Ref. 15. b) STGT. c) S-transform. d) Gabor transform, $\sigma_g = 0.25$.